早稲田社会科学総合研究　第3巻第2号（2002年11月）

フレキシブル関数の理論

浜　口　　登

序[1]

筆者がフレキシブル関数型の研究を本格的に始めたのは1994年頃のことである。当初は輸出入関数の計測を確かな理論的基礎のもとに行ないたいと考えていた。研究の結果そのためのほぼ唯一の手段はフレキシブル関数型を使うことだという結論に達した（浜口(1994)、(1997) を参照)。本稿ではフレキシブル関数型そのものの理論をより詳しく検討する。

以下第1節は、フレキシブル関数型入門である。第2節では関数型の選択に関する一般論を述べる。第3節ではフレキシブル関数型とは何かを考える。第4節では関数型の歴史的な展望を行なう。結論は第5節で述べる。

第1節　フレキシブル関数型：序論

フレキシブル関数型を最初に提示したのはBarten（1964）であるが[2]、広く学会の注目を集めたのはDiewart（1971, 1974c）といえよう。フレキシブル関数型の定義は、研究者によって微妙に異なる[3]。ここではLau（1986）から引用しておこう。"Flexibility means the ability of algebraic functional form to approximate arbitrary but theoretically consistent behavior through an appropriate choice of the parameters."（p. 1539）もう少し具体的で、やや狭い定義は「任意の関数の2次あるいはそれより高い次数の近似になっている関数型」といえる。現在までのところ提示されているほとんどの関数型は2次近似である。最も分かりやすい例はトランスログ関数型である。説明を簡単にするため、生産物（y）が1つ、生産要素が資本（K）と労働（L）だけで、技術進歩がないケースを考えてみよう。関数型は、

1）以下は佐々波・浜口・千田（1988）の中で筆者が担当した部分（特にpp. 116–39）を参考にした。
2）これはロッテルダムモデルといわれ、オランダの経済学者Theilが中心となって開発された。
3）フレキシブル関数型の定義については、第3節で詳しく分析する。

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln K + \beta_2 \ln L + \phi_1 \ln K^2 + \phi_2 \ln L^2 + \phi_3 \ln K \cdot \ln L$$

である。ln は自然対数である。右辺を見ると、最初の3項はコブ—ダグラス生産関数と同じである。残りの3項は2次関数の形になっているが、これらが2次近似項である。したがって、トランスログ関数型はコブ・ダグラス関数型に2次近似項を加えたものになっている。

2次近似がなぜ重要かというと、我々が求めたい需要・供給関数が支出関数や費用関数を偏微分して得られるからである[4]。偏微分すると関数の階数が一つ減る。そこで、需要・供給関数が1次近似であるためには支出関数や費用関数が2次近似である必要がある。特に価格の自己・交差弾力性が、理論的制約を満たしたうえで、任意の値をとれることが重要である。一昔前までよく使われていたコブ・ダグラス（CD）やCESはフレキシブルではない。CDでは代替の弾力性が1以外の値をとれないし、CESでは代替の弾力性が一定でなければならない。CESは生産要素の数が2つより多くなると、全ての要素間の代替の弾力性が全て等しくなければならないことがUzawa（1962）によって証明されている。ここで、2次近似といったが、それは特定の点の近傍（local）のことで、大域的（global）な近似にはなっていない、したがって、関数の値域（range）、つまり、独立変数が取りうる範囲全体の関数の性格は未知である。これが、経済理論が具体的な関数を示唆できない理由の1つである。そこで、計量経済学的分析をする研究者にとって、関数型の選択は頭の痛くなる問題になるわけである[5]。

第2節　関数型の選択に関する一般論

経済学のモデルあるいは理論は関数の集合であることが多い。しかし、理論自体が各関数の具体的な形（つまり関数型）を明確にする必要はないことがほとんどであるし、一般的に言って不可能である。

ところが、理論やモデルを現実のデータに照らしてテストするとなると、関数型を具体的に決めざるを得ない。関数型の選択問題は以下で述べるが、一方では関数型が理論と整合的でなければならないのに対して、もう一方では、関数型がデータによくフィットしなければならないという一種のジレンマが存在する。

純粋理論の世界で、モデルの解を求める方法は、全ての関数を全微分して、1次近似にし、求められる連立一次方程式を（クラメールのルール等で）解く。しかし、実証研究の場合は次のような注意が必要である。

一般的にいって関数型は

4)　これはShephard（1953）やHotelling（1932）の補題やRoy（1947）の恒等式などに関連している。これらはいわゆる双対性理論の核心である。

5)　Appelbaum（1979）を参照。なお関数型問題に関する最も優れたサーベイ論文はLau（1986）である。以下の詳細はこの論文を参照。

$$y = f(X, \alpha) + \varepsilon$$

という形をとる。ここでyは従属変数（被説明変数）、Xは独立変数（説明変数）、αは推定すべき、未知のパラメーター、εは確率論的な撹乱項である。εは平均がゼロで、分散が同一かつ独立に分布すると仮定されることが多い。つまり、いわゆる系列相関やヘテロスケダスティシティーが存在しないと仮定するわけである。しかし、実際にはこの仮定は満たされないことが多く、分析者は様々な工夫をして、適切な推定を行なうのが普通である。この問題については、どの計量経済学のテキストにも解説が載っているので、ここではこれ以上追求しない。

最もよく使われる関数型はパラメーターに関して線形であるものである。パラメーターに関して線形だと、計測が簡単だという利点がある。

関数型がもつべき性質として、Lau（1986）は次の5つをあげている。

①理論的整合性（Theoretical consistency）

②適用可能領域（Domain of applicability）

③伸縮性（Flexibility）

④推定の容易さ（Computational facility）

⑤事実との対応性 （Factual conformity）

理論的整合性

理論的整合性とは例えば生産関数なら[6]、選んだ関数型が生産関数の持つべき理論的制約を持ちえるか、という問題である。生産関数は（a）対称性（Symmetry）、（b）同次性（Homogeniety）（c）単調性（Monotonicity）、（d）凹性（Concavity）の4つの条件を満たす必要がある。（a）はヤングの定理からくるもので、もし、生産関数が$y = F(X_1...X_n)$で表せるなら、$\beta_{ij} = \partial^2F/\partial x_i \partial x_j = \partial^2F/\partial x_j \partial x_i = \beta_{ji}$ $(i, j = 1...n, i \neq j)$ということである。（b）は生産関数が1次同次であることで、$ky = F(kx_1..kx_n)$、$k > 0$と表現できる。（c）は任意の生産要素x_i $(i = 1...n)$について限界生産力が正になるということである。（d）は利潤極大化の必要十分条件であるヘッセ行列が非正半定符号（Negative semi-definite）なことである。

適用可能領域

適用可能領域とは関数の独立変数が、理論的整合性を満たしながらとりうる値の範囲（数学では領域という）がどれくらい広いかという問題である。この範囲は多くの場合、価格が正になる領域であるから、常に満たされているように思えるが、しかし、価格が正になる領域全てにパラメーターを設定することは、直感に反して難しく、ほぼ不可能とい

6) 以下の詳細は黒田（1984）を参照。

うことが分かっている。

伸縮性

伸縮性（Flexibility）とは、理論的制約を満たした上で、関数のパラメーターが特定の制約を受けないという意味である。コブ・ダグラス関数型は生産要素間の代替の弾力性が1以外の値をとれないし、CES関数型はこの代替の弾力性が任意の値をとれるが、常に一定でなければならないという制約を受ける。したがって、コブ・ダグラスとCESはフレキシブルではない。

推定の容易さ

これは自明の理であろう。第1に関数型がパラメーターに関して線形（1次関数）であること。ただし、コブ・ダグラス関数型のように、対数変換をおこなって線形になる場合を含む。第2に関数がホモセティックだと推定が容易になる。第3に、同じ経済の同一期間の複数の関数（例えば消費者の支出関数と生産者の費用関数）が同一の関数型をしていることが望ましい。第4に、推定すべきパラメーターの数は少ないほどよい。これを「ケチ」の（Parsimony）原理という。ただし、これらの問題はパソコンの計算能力が飛躍的に向上した今日では、あまり重要ではないかもしれない。もちろん非線形推定の計量経済学的検定はまだ十分解明されていない分野であるが。

事実との対応性

これは関数型と広く認められる実証的観察（場合によると法則）とが整合的か否かという問題である。しかし、「広く認められる法則」は経済学の分野では多くない。確立された法則といえるのは「エンゲルの法則」くらいである。残念ながら、この法則ゆえにホモセティックな消費者支出関数型は使えないことになる。その他に「法則」らしきものを列挙すると

(a) 化学産業で観察される、資本コストと産出能力の間の6/10乗の法則。

(b) 3つあるいはそれ以上の生産要素間の代替弾力性は等しくない。

(c) 中間生産物間の投入・産出係数は一定。

(d) エンゲル曲線は全ての財について直線ではない。

などである。(a) はホモセティックな生産関数を否定する。(b) はCES型の生産関数を否定する。(c) は生産関数がレオンティエフ型であること意味し、新古典派的なスムースで2回連続微分可能な生産関数を否定する。(d) については上記のとおり、ホモセティックな消費者支出関数が使えないことを意味する。

Lauの提起した、関数型が満たすべき5つの基準は、いずれも納得のいくものである。

しかし、Lau自身が証明したように、5つの基準を全て、同時に満たす関数型は存在しないのである。それどころか、5つの基準から選んだ任意の2つの基準を同時に満たすことさえ難しいのである。したがって、何らかの妥協が必要になるが、Lauは理論的整合性、伸縮性、計測の容易さに関しては妥協すべきでないと主張する。「計測の容易性(Computational facility)」で妥協すべきでないというのは意外に聞こえるが、高度の非線形推定と、線形推定では計算の誤差が、けた違いに異なる、というのが彼の主張である。

フレキシブル関数型の原点は、技術が経済に及ぼす効果に関してはできるだけ制約をかけないようにするという考え方である。Hanoch（1975）によると、インプットがn個、アウトプットが1個の生産関数、$y = f(v)$ を想定すると、下記のような表ができる。

表1

経済的効果	フォーミュラ	独立な経済効果の数
産出量	$y = f(v)$	1
規模の経済性	$\mu = (\Sigma v_i f_i)/f$	1
所得分配率	$S_i = v_i f_i / \Sigma v_i f_i$	$n-1$
価格の自己弾力性	$\varepsilon i = v_i f_{ii}/f_i$	n
代替の弾力性	$\sigma_{ij} = \{-(f_{ii}/f_i^2) + 2(f_{ij}/f_i f_j) - (f_{jj}/f_j^2)\} / \{1/v_i f_i + 1/v_j f_j\}$	$n(n-1)/2$

独立な経済的効果の数は $(n+1)(n+2)/2$ である。つまり、関数型が比較静学の効果を無制約に再度作れるための必要・十分条件はその関数型が $(n+1)(N+2)/2$ の独立のパラメーターを持つことである。

第3節　フレキシブル関数型の定義[7)]

関数型の選択に関する重要なポイントは、2回連続微分可能なこと（1階と2階の微分係数が存在し、定義できること）、ヘッシアンが対称行列で、対角要素がn個、非対角要素が $(1/2)n(n-1)$ 個、関数の値が1個で計 $(1/2)(n+1)(n+2)$ 個あること、である。

最も便利なのは一般化線形で、

$$h(z) = \Sigma \alpha_i b_i(z)$$

と表現される。ここで、$b_i(z)$ は2回連続微分可能なzの関数、α_iはパラメーターである。これが、

$$h^*(z^0) = h(z^0)$$

$$\nabla_z h^*(z^0) = \nabla_z h(z^0)$$

$$\nabla_{zz} h^*(z^0) = \nabla_{zz} h(z^0)$$

7)　以下の詳細はFuss, McFadden and Mundlak（1978）, Chambers（1988）及び 根本（1984）を参照。

を満たすとき、関数h(・)は2階の微分近似（second-order differential approximations）と呼ばれる。この2階微分の意味での近似の他に、テイラー展開の意味での近似も可能である。

$$\alpha_1 = h^*(z^0)$$

$$\alpha_i = \partial h^*(z^0)/\partial z_{i-1},\ i = 2,\dots,n+1,$$

$$\alpha_j = \partial^2 h^*(z^0)/(\partial z_{i-1}\,\partial z_m),\ j = n+2,\dots,(1/2)(n+1)(n+2)$$

及び、

$$b_1(z^0) = 1$$

$$b_i(z^0) = z_{i-1}-z_{i-1}^0,\ i = 2,\dots, n+1$$

$$b_j(z^0) = (1/2)(z_v-z_v^0)(z_m-z_m^0),\ j = n+2,\dots,(1/2)(n+1)(n+2),$$

これにより、2階のテイラー級数展開が得られる。これを2階の数値近似（second-order numerical approximation）という。そして、second-order numerical またはsecond-order differential approximation になっている関数型を、フレキシブル関数型（flexible functional forms）と呼ぶ。フレキシブル関数型に関しては、さらに2つの定義がある。第1にLau（1974）が Diewert（1974）に対するコメントの中で明らかにしたように、真の関数の2階のテーラー近似になっていて、3次あるいはそれ以上の項が無視できるほど小さい場合をさす。第2に、Fuss, McFadden and Mundlak（1978）はn生産要素の生産関数が（n+1)(n+2)/2の独立な経済効果をもつ場合をフレキシブル関数型と定義した。

全ての2次近似関数が、いかなる生産関数をも表現できるわけではない。第1の定義では、制約がかかるのは近似点の近傍だけだが、第2の定義では、globalに制約がかかる。

2回連続微分可能な関数が凸であるためには、ヘッシアンが正値定符号である、すなわちprinciple minorが全て非負、あるいは固有値が全て非負である必要がある。関数が凹であるためにはヘッシアンが負値定符号、すなわちprinciple minorが負値から始まり、正と負に符号が変る、あるいは固有値が全て非正である必要がある。これらの総称はcurvature conditionであるが、これをかけると、フレキシブル関数がフレキシブルでなくなる、という厄介な問題が起こる。

ほとんどのフレキシブル関数型はパラメーターに関して線形である。すなわち

$$f^*(x) \fallingdotseq f(x) \equiv \Sigma a_i h_i(x)$$

と表せる。≒はその両辺が厳密に等しくはないが、近似的には等しいと見なせるという数学記号である。f^*は真の関数、fはその近似である。a_iはパラメーター、h_iは関数、xは独立変数（のベクトル）である。

もし、N =（n+1)(n+2)/2でウロンスキアン（Wronskian）が点x^*の近傍でゼロでなければ、a_iが上式の展開が点x^*の近傍で、f^*とその1階と2階の偏微分係数の値の近似になる。このような展開を節約的なフレキシブル関数型（Parsimonious flexible form, PFF）と呼

ぶ。PFFを作る一般的な方法はx^*の近傍で、2階のテーラー展開を使うことである。この場合、関数hとそれに対応するパラメターの値の対応は次のようになる。

$h^0(x) = 1 \qquad a^0 = f^*(x^*)$

$h_i(x) = x_i - x_i^* \qquad a_i = f_i^*(x^*) \qquad i = 1,..,n,$

$h_{ij}(x) = (1/2)(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) \qquad a_{ij} = f_{ij}^*(x^*) \qquad i,j = 1,..,n$

ここで注意したいのは、「x^*の近傍で」という但し書きである。近傍から外れてしまうと、上記のような様々なパラメーターや経済的効果はその値が保証されなくなるという点である。これは、普通の実証分析が、かなり広い領域（Domain）の観察値を使って関数の推定をすることを考慮すると、かなり深刻な問題である。

第4節　関数型の歴史的な展開

最初に開発され、広く応用された関数型はコブ・ダグラス型の生産関数であるが[8)]、Douglas（1967）によると、彼らより30年程前にWicksteed（1894）がいわゆるコブ―ダグラス（CD）関数型を提示していたと言うことである。

経済学者Douglasは1899～1927年の米国の製造業に関して、(1) 雇用者数、(2) 固定資本の実質数量、(3) 生産量を対数表にプロットしたところ、(3) の曲線が (1) の曲線と (2) の曲線の中間にあり、(1) から1/3、(2) から1/4のところを通り、3曲線は直線に近いことを発見した。そこで、友人で、数学者のCobbとともに、いわゆるコブ―ダグラス（CD）生産関数を開発した。さらに、1次同次性が確認され、生産要素分配率とCD生産関数の分配パラメーターがほぼ正確に一致した。

生産要素が資本（K）と労働（L）のみの場合、この関数型は

$y = AK^{\beta}L^{1-\beta}$

という形をとる。両辺の対数をとると、

$\ln y = \ln A + \beta \ln K + (1-\beta) \ln L$

となり、対数線形であることが分かる。ベータは資本の、$1-\beta$は労働の分配率である。ダグラスは実際にこの関数をアメリカの製造業のデータに当てはめ、生産関数の1次同次性と$1-\beta$=労働の分配率という実証結果を確認している。観察事実を見極め、それと整合的な関数型を模索し、実証研究で理論と計測の整合性を確かめる、という手順は計量経済学的分析の一つの模範例といえよう。

1920年代から50年代まで、CD生産関数は広く使われたが、その限界に気付いた経済学者は新たな関数型を探し始めた。その典型はコブ・ダグラスを特殊なケースとしてより一般的な関数型を求めたConstant Elasticity of Substitution（CES）関数型である。これはK.

---

8) CobbとDouglasがCD関数型を最初に発表したのは、Cobb and Douglas（1928）である。

ArrowとR. Solowがそれぞれ独自に開発し、後にArrow, Chenery, Minhas and Solow（1961）により発表された。それは

(1) $y=\gamma[(1-\delta)K^{\rho}+\delta L^{\rho}]^{1/\rho}$

という関数型を提示した。γは効率性パラメーター、δは分配率パラメーター、ρは代替性パラメーターである。コブ・ダグラスの場合、生産要素間の代替の弾力性は1であったが、CESの場合、$1/(1-\rho)$ に等しく、一定であるが、1以外の値をとりうる。(1) はパラメーターに関して線形でないが、完全競争を仮定すると、労働生産性と実質賃金の間、と資本生産性と資本の実質レンタルプライスとの間に

(2) $\ln(y/L)=\alpha+\sigma\ln(w/p)$

(3) $\ln(y/K)=\beta+\sigma\ln(r/p)$

という線形の関数が導ける。ここで、wは名目賃金、rは名目レンタルプライス、pは生産物yの価格である。普通 (1) 式ではなく、(2) (3) 式を推定することが多いが、非線形推定が容易になった今日では (1) 式を直接計測することも可能である。しかし、CES関数型には意外な落とし穴があることが明らかになった。CES生産関数において、生産要素の数が2を超えると、代替の弾力性を一定に保つためには、CES関数の集計関数がコブ・ダグラス型でなければならないことをUzawa（1962）が証明した（McFadden（1963）も参照）。彼の提唱する集計関数は、

$y=\Pi_i[(\Sigma_j\beta_j\cdot x_j^{\rho i})^{-1/\rho i}]^{ai}\ \Sigma_i a_i=1$

である。Sato（1967）はCES関数のCES集計関数を提唱した。

$y=\Sigma_s[\alpha_s\cdot z_s^{-\rho}]^{-1/\rho}$

ここで、

$Z_s=[\Sigma_i\beta_i^s\cdot(x_i^s)^{-\rho s}]^{-1/\rho s}$

Powell and Gruen（1968）は

$[\alpha_1\cdot y_1^{\rho 1}+\alpha_2\cdot y_2^{\rho 1}]^{1/\rho 1}=[\beta_1\cdot x_1^{\rho 2}+\beta_2\cdot x_2^{\rho 2}]^{1/\rho 2}$

という生産フロンティア（Production frontier）を開発した。左辺がアウトプット、右辺がインプットである。生産関数（Production function）は、通常アウトプットが1つである。数学では単に関数といえば従属変数が1つである。しかし、実際の生産工程では投入も産出も複数であることが多い。そこで、関数と区別するためフロンティアという名詞を使うのである。このフロンティアはconstant elasticity of transformation-constant elasticity of substitution（CET/CES）production frontierと呼ばれる。

Samuelson（1965）は「いかなる一次同次の生産関数も、それが、コブ・ダグラスかCES型の場合にのみ強分離可能（Strongly separable）ないし、加法的（Additive）である」という定理を証明している。関数が強分離的ないし、加法的になると、自己双対的（Self dual）になるという重要な性質がある（例えば生産関数がCES型なら、費用関数も

CES型になる)。

その他の関数型としては、次のようなものがある。

Heady (1952), Heady, Johnson, and Hardin (1956) は2次形式 (Quadratic form)、Halter, Carter and Hocking (1957) はtranscendental[9] 型を、60年代と70年度当初には、CD型の新たな一般化がおこなわれた。Uzawa (1962) の多要素CES型、Zellner and Revankar (1969) の一般化生産関数、Revanter (1971) のVariable Elasticity of Substitution (VES)[10] 型、Hanoch (1971) の Constant Ratio Elasticity of Substitution-homothetic (CRESH) 型等である。

本格的なフレキシブル関数型の開発は意外な所からやって来た。双対性 (Duality) 理論の発展である。パイオニアはMarc Nerlove (1963) である。彼は当時の research assistantだったDaniel McFaddenに、(i) 生産理論にDualityをいかに適用するかと、(ii) 生産要素の数が3、あるいはそれ以上の場合のフレキシブル関数型の開発を依頼した。McFaddenは (i) に集中し、(ii) は彼の弟子だった、Edwin Diewertの仕事になった。DiewertのPh. D論文は1969年に提出されたが、その内容は、Diewert (1971, 1973, 1974a, 1974b) 等に発表されている。パラメーターに関して線形でかつある点で2次近似になっている関数型を最初に提示したのは、Diewert (1971) の一般化線形一般化レオンティエフ関数型であり、Christensen, Jorgenson and Lau (1971) のトランスログ型がこれに続いた。

Diewertは費用関数、$C(y;p)$ に次のようなregularity conditionsを課した、

1. $C(y;p)$ は、正の実数価値関数で、有限な$y \geqq 0$、$p \gg 0$に対し、有限である。
2. $C(y;p)$ は、yに関して非減少で、連続。$p \gg 0$に対し、$y \to \infty$なら$C(y;p) \to \infty$
3. $C(y;p)$ は、pに関して、非減少。
4. $C(y;p)$ は、全ての$y > 0$に対し、pに関して1次同次。
5. $C(y;p)$ は、全ての$y > 0$に対し、pの凹関数。

Diewert (1971) は次のような一般化レオンティエフ関数型を提示した。

$$C(y;p) = h(y) \quad \Sigma_i \Sigma_j b_{ij} \cdot p_i^{1/2} \cdot p_j^{1/2}, \quad p_i, p_j, \geqq 0$$

ここで、$h(y)$ はyの連続、単調増加関数で、$h(0) = 0$ で$y \to \infty$なら$h(y) \to \infty$。さらに、$B = \{b_{ij}\}$ は$n \times n$の対称行列で、$\Sigma_i \Sigma_j b_{ij} = 1$

9) Transcendental とは数学では “of or relating to a real or complex number that is not the root of any polynomial that has positive degree and rational coefficients” 「正の階で有理数の係数を持ついかなる多項式の根でない実数または虚数の、あるいはそれと関連している」という意味である。(American Heritage Dictionaryによる。)

10) 高木尚文 (1971) はVES生産関数を列挙して、「第2ないし第5節において、従来得られている生産関数をほとんど網羅したつもりである。」(p. 3) と述べておられるが、Lau教授は私宛の私信のなかで、「CES以外の関数は全てVESであり、VES関数の完全なリストを作るのは原理的に不可能」と述べておられる。もちろん高木氏が間違っていると主張するわけではなく、VES関数型に関して、誤解を解いておきたいだけである。

ほぼ同時に開発されたのが、transcendental logarithmic（略してトランス･ログ）関数型である。最初に提示したのはChristensen, Jorgensen and Lau（1971, 1973）（略してCJL）であるが、その起源はKmenta（1967）にさかのぼる。彼はCES生産関数の対数線形推計を試みていたのだが、CES生産関数の2階のテーラー近似をとったところ、トランス・ログによく似た関数型にたどり着いた。実際、実証研究で使われたフレキシブル関数型のなかで、際立って多く使われたのはトランス・ログである[11]。

第5節　結論

紙幅の制約で、フレキシブル関数型の理論の1部分しか分析できなかったが、それでも盛り沢山のトピックスが提示できた。読者にはフレキシブル関数型の有用性を納得していただけると思う。もはやフレキシブル関数は学会の標準（グローバル･スタンダード）になっていると思われる。今後に残された課題は、すでに提示されているフレキシブル関数型の具体的形態を展望してそれぞれの長所・短所を整理し、特に計量経済学的な見地から評価することと、実際のデータを使用して、実証研究を行うことであろう。本稿ではフレキシブル関数の限界を明示できなかったので、今後の研究課程でより深く研究していきたい。

付記：本研究は2000年度の特定課題研究費の援助で可能となった。また約2年間の特別研究期間を提供してくれた早稲田大学に感謝したい。本稿の一部は筆者が特別研究期間の間スタンフォード大学の客員研究員をしていたときに書いたが、同大のLawrence J. Lau教授から貴重なアドバイスを受けた。Lau教授に感謝したい。もちろん残された誤りは筆者のみの責任である。

参考文献

邦語文献

黒田昌裕（1984）『実証経済学入門』日本評論社

佐々波楊子・浜口　登・千田亮吉（1988）『貿易調整のメカニズム：輸出入のミクロ的基礎』文眞堂

高木尚文（1971）「VES生産関数」『経済研究』（成城大学）36号、11月、pp. 1-44.

根本二郎（1984）「生産関数分析のための伸縮的関数型について」『経済科学』（名古屋大学）3巻3号、2月、pp. 80-115.

浜口　登（1994）「輸出入関数の理論：フレキシブル関数アプローチ」『早稲田社会科学研究』第49号、10月、pp. 37-53.

浜口　登（1997）「フレキシブル関数型と輸出入関数の計測：展望」『早稲田社会科学研究』第54号、3月、pp. 95-115.

英語文献

Appelbaum, E.（1979）“On the Choice of Functional Forms,” *International Economic Reviews*, Vol. 20, No. 2, June, pp. 449-58.

Arrow, K. J.; Chenery, B. H.; Minhas, B. S. and Solow, R. M.（1961）“Capital-labor Substitution and

11）すでに述べたように、フレキシブル関数型の例は多いがそれらをここで全て列挙するのは紙幅の関係でできないので、比較的よい文献としてKohli (1991) の第7章を上げておく。

Efficiency," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 43, No. 3, pp. 225–250.

Berndt, E. and Khaled, M. (1979) "Parametric Productivity Measurement and Choice among Flexible Functional Forms," *Journal of Political Economy*, Vol. 87, No. 6, pp. 1220–45.

Barten, A. P. (1964) "Consumer Demand Functions under Conditions of Almost Additive Preference," *Econometrica*, Vol. 32, No. 1, January-April, pp. 1–38.

Chambers, R. G. (1988) *Applied Production Analysis*, Cambridge: Cambridge University Press.

Christensen, L. R.; Jorgenson, D. W. and Lau, L. J. (1971) "Conjugate Duality and the Transcendental Logarithmic Function," *Econometrica*, Vol. 39, No. 4, pp. 255–56.

Christensen, L. R.; Jorgenson, D. W. and Lau, L. J. (1973) "Transcendental Logarithmic Production Frontier," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 55, No. 1, pp. 28–45.

Cobb, C. and Douglas, P. (1928) "A Theory of Production," *American Economic Review*, Vol. 18, No. 1, supplement, pp. 136–165.

Diewert, W. E. (1969) *Functional Form in the Theory of Production and Consumer Demand*, unpublished Ph. D dissertation, University of California, Berkeley.

Diewert, W. E. (1971) "An Application of the Shephard Duality Theorem; A Generalized Leontief Production Function," *Journal of Political Economy*, Vol. 79, pp. 481–507.

Diewert, W. E. (1973) "Functional Forms for Profit and Transformation Functions," *Journal of Economic Theory*, Vol. 6, pp. 284–316.

Diewert, W. E. (1974a) "Functional Forms for Revenue and Factor Requirements Functions," *Internatinal Economic Review*, Vol. 15, No. 1, February, pp. 119–30.

Diewert, W. E. (1974b) "Applications of Duality Theory," in *Frontiers of Quantitative Economics*, eds. by M. D. Intrigator and D. A. Kendrick, Vol. 2, Amsterdam: North-Holland, pp. 106–76.

Douglass, P. (1967) "Comments on the Cobb-Douglas Production Function," in *The Theory and Empirical Analysis of Production* ed. by M. Brown, New York: Columbia University Press, pp. 15–22.

Fuss, M. and McFadden (eds.) (1978) *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, Amsterdam: North-Holland.

Fuss, M.; McFadden, and Mundlak, Y. (1978) "A Survey of Functional Forms in the Economic Analysis of Production," in Fuss and McFadden (1978), Vol. 1, pp. 219–268.

Halter, A. N.; Carter, H. O. and Hocking, J. G. (1957) "A Note on Transcendental Production Functions," *Journal of Farm Economics*, Vol. 39, No. 4, pp. 996–77.

Hanoch, G. (1971) "CRESH Production Functions," *Econometrica*, Vol. 39, No. 5, pp. 256–75.

Hanoch, G. (1975) "Production and Demand Models with Direct and Indirect Implicit Additivity," *Econometrica*, Vol. $3, No. 3, pp. 395–420.

Heady, E. O. "Use and Estimation of Input-Output Relationship or Productivity Coefficient," *Journal of Farm Economics*, Vol. 35, No. 5, pp. 775–86.

Hotelling, H. (1932) "Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions," *Journal of Political Economy*, Vol. 40, No. 5, pp. 577–616.

Heady, E. O.; Johnson, G. L. and Hardin, L. S. (1965) *Resource Productivity, Returns to Scale and Farm Size*, Ams: Iowa State University Press.

Kmenta, J. (1967) "On the Estimation of the CES Production Function," *International Economic Review*, Vol. 8, No. 2, pp. 180–89.

Kohli, U. (1991) *Technology, Duality, and Foreign Trade*, New York: Harvester Wheatsheaf.

Lau, L. J. (1974) "Comments on Application of Duality Theory," in M. Intriligator and D. Kendric (eds.) (1974), pp. 176–99.

Lau, L. J. (1986) "Functional Forms in Econometric Model Building," in *Handbook of Econometrics* (Vol. III) eds. by Z. Griliches and M. D. Intriligator, Amsterdam: North Holland, pp. 1515–66.

McFadden, D. (1963) "Further Results on C.E.S. Production Functions," *Review of Economic Studies*, Vol.

30, No. 84, pp. 73−83.

Nerlove, M. (1963) "Returns to Scale in Electricity Supply," in *Measurement in Economics: Studies in Mathematics and Econometrics in Memory of Yehuda Grunfeld*, eds. by C. F. Christ et al. Stanford: Stanford University Press.

Powell, A. A. and Gruen, F. H. G. (1968) "Constant Elasticity of transformation Frontier and Linear Supply System," *International Economic Review*, Vol. 9, No. 3, pp. 315−28.

Revankar, N. S. (1971) "A Class of Variable Elasticity Production Functions," *Econometrica*, Vol. 39, No. 1, pp. 61−71.

Roy, R. (1942) *De l'utilite*, Paris: Hermann.

Samuelson, P. A. (1965) "Using Full Duality to Show That Simultaneously Additive Direct and Indirect Utilities Implies Unitary Price Elasticity of Demand," *Econometrica*, Vol. 33, No. 4, pp. 781−96.

Sato, K. (1967) "A Two Level CES Production Function" *Review of Economic Studies*, Vol. 34, No. 98, pp. 201−218.

Shephard, R. W. (1953) *Cost and Production Function,* New Jersey: Princeton University Press.

Uzawa, H. "Production Functions with Constant Elasticity of Substitution," *Review of Economic Studies*, Vol. 29, No. 81, pp. 291−99.

Walters, A. A. (1963) "Production and Cost Functions: An Econometric Survey," *Econometrica*, Vol. 31, No. 1−2, January-April, pp. 1−66.

Wicksteed, P. (1894) "Essay on the Coordination of the Laws of Distribution," *Economic Journal*, Vol. 4, No. 14, January, pp. 305−13.

Zellner, A. and Revankar, (1969) "Generalized Production Functions," *Review of Economic Studies*, Vol. 36, No. 107, pp. 241−50.